SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL
PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I. JULIO 2012

1. Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} C &= \text{Paula ha ido al Cine} \\ T &= \text{Paula ha ido al Teatro} \\ Co &= \text{Paula ha ido a un Concierto} \\ A &= \text{al terminar, se encuentra con amigos} \end{aligned}$$

Nos dan las probabilidades:

$$P(C) = 0.5, \quad P(T) = 0.2, \quad P(Co) = 0.3$$

$$P(A|C) = 0.6, \quad P(A|T) = 0.1, \quad P(A|Co) = 0.9$$

a) Se pide $P(A)$. Por el Teorema de la Probabilidad Total se tiene:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C) \cdot P(C) + P(A|T) \cdot P(T) + P(A|Co) \cdot P(Co) \\ &= (0.6) \cdot (0.5) + (0.1) \cdot (0.2) + (0.9) \cdot (0.3) \\ &= 0.3 + 0.02 + 0.27 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

a) Se pide $P(T|\bar{A})$. Por el Teorema de Bayes, se tiene:

$$P(T|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|T)P(T)}{P(\bar{A})} = \frac{(0.9) \cdot (0.2)}{1 - 0.59} = \frac{0.18}{0.41} = 0.439$$

2. *a*) Sea la variable aleatoria

$$T = \textit{tiempo de reparación de un motor (en horas)} \sim N(2, 0.6)$$

Nos piden que calculemos la probabilidad de que el tiempo de una reparación sea mayor que 1.5 horas. Pero sabemos que el rango de valores que puede tomar está restringido a los valores mayores a 0.5 (media hora) debido al reconocimiento inicial del motor, por lo que debemos truncar la variable aleatoria. De esta manera:

$$P(T > 1.5|T > 0.5) = \frac{P(T > 1.5 \cap T > 0.5)}{P(T > 0.5)} = \frac{P(T > 1.5)}{P(T > 0.5)} =$$

...para calcular las probabilidades de una variable aleatoria que sigue una distribución normal, primero tipificamos y luego aplicamos las propiedades de simetría de la normal, de manera que podamos buscar los valores en la tabla de $Z \sim N(0, 1)$...

$$= \frac{P(Z > \frac{1.5-2}{0.6})}{P(Z > \frac{0.5-2}{0.6})} = \frac{P(Z > -0.83)}{P(Z > -2.5)} = \frac{P(Z < 0.83)}{P(Z < 2.5)} = \frac{0.7967}{0.9938} = 0.801$$

b) Sea ahora la variable $Y =$*número de reparaciones, de* 6*, que duran más de* 1.5 *horas.* La variable Y se distribuye como Binomial, con probabilidad de éxito la probabilidad calculada en el apartado aterior, es decir, $Y \sim Bin(6, p = 0.801)$. Se pregunta la $P(Y \geq 4)$:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= P(Y=4) + P(Y=5) + P(Y=6) = \\ &= \sum_{y=4}^{6} \binom{6}{y} (0.801)^y (1-0.801)^{6-y} = \\ &= 0.244 + 0.393 + 0.264 = \\ &= 0.1983 \end{aligned}$$

3. Primero hacemos unos cálculos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n_1} = 8230$$

$$S_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - n_1 \bar{X}^2}{n_1 - 1} = 15750$$

Además, $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $\bar{Y} = 7940$, $S_2^2 = 10920$.

a) Suponiendo varianzas iguales, la variable pivote es

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

a partir de esta variable obtenemos el intervalo de confianza

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - S_p t_{9,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + S_p t_{9,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

Como nos piden una confianza del 99 %, $\alpha = 0.01$ y $\frac{\alpha}{2} = 0.005$. Buscando en la tabla de la t de Student, $t_{9,0.005} = 3.25$.

Falta calcular la cuasivarianza muestral ponderada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = 13066.667$$

y su raíz es $S_p = 114.3095$.

Sustituyendo se obtiene que el intervalo de confianza para la diferencia de medias es

$$(65.0421, 514.9579)$$

Como el 0 no pertenece a ese intervalo, concluimos que el carbón procedente de las dos minas tiene distinta capacidad media de producción de calor.

b) Las hipótesis a contrastar son:

$$\begin{cases} H_0 & : & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 & : & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

La medida de discrepancia es

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}$$

Así, sustituyendo, la discrepancia observada es $\hat{d} = 4.18967$, y la región de no rechazo es $(-t_{9,0.005}, t_{9,0.005}) = (-3.25, 3.25)$ y la región crítica o de rechazo es $(-\infty, -3.25) \cup (3.25, \infty)$. Como $\hat{d}$ pertenece a la región crítica, existe evidencia para rechazar la hipótesis nula y concluimos que las medias son diferentes.